Solución del examen de **Matemáticas II**

EvAU 2022 (8 de junio)

TU ACADEMIA PERSONALIZADA

OPCIÓN A

A1 $\begin{cases} x-2my+z=1 \\ mx+2y-z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ $\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

a) $|A| = 0 \rightarrow 2+2m-m-(2+1-2m^2)=0$

$\cancel{2}+2m-m-\cancel{2}-1+2m^2=0$

$2m^2+m-1=0 \rightarrow m=\frac{1}{2}$ y $m=-1$

- Si $m \neq \frac{1}{2}$ y $m \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango $\bar{A} = 3 =$ Rango $(A) =$ nº incógnitas

$\downarrow$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

- Si $m=\frac{1}{2}$: $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow |A|=0$; $\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0}_{\text{Rango } (A) = 2}$

Los determinantes 3×3 de $\bar{A} = 0$ por lo que probamos det. 2×2:

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \longrightarrow$ Rango $(\bar{A}) = 2$

Luego Rango $(A) = 2 =$ Rango $(\bar{A}) <$ nº incognitas $\rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

- Si $m=-1$: $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow |A|=0$; $\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0}_{\text{Rango } (A) = 2}$

Los determinantes 3×3 de $\bar{A} = 0$ por lo que probamos det. 2×2

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \longrightarrow \text{Rango } (\bar{A}) = 2$$

Luego Rango (A) = 2 = Rango ($\bar{A}$) < nº incognitas → SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

b) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \frac{1}{2}x + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ \frac{1}{2}x + 2y - z = -1 \end{cases} \xrightarrow{E_2 + \frac{1}{2}E_1}$

$\frac{3}{2}x + y = 0 \longrightarrow \boxed{x = \lambda}$

$y = -\frac{3}{2}x = \boxed{-\frac{3}{2}\lambda}$

$z = 1 - x + y = 1 - \lambda - \frac{3}{2}\lambda = \boxed{1 - \frac{5}{2}\lambda}$

$$\boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{3}{2}\lambda \\ z = 1 - \frac{5}{2}\lambda \end{cases}}$$

A2 $f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Continuidad: Para que $f(x)$ sea continua en $x=0$, se tiene que cumplir que $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

- $f(0) = 0$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^3 \cdot e^{-1/x^2} = 0^3 \cdot e^{-1/0^2} = 0 \cdot e^{-1/0} = 0 \cdot e^{-\infty} =$

$= 0 \cdot \frac{1}{e^{\infty}} = 0 \cdot \frac{1}{\infty} = 0 \cdot 0 = \boxed{0}$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^3 \cdot e^{-1/x^2} = 0^3 \cdot e^{-1/0^2} = \boxed{0}$

Como $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ la función es continua en $x=0$

a) • Derivabilidad:

$$\rightarrow \frac{-1}{x^2} = -x^{-2} = 2x^{-3}$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-1/x^2} + x^3 \cdot e^{-1/x^2} \cdot 2x^{-3} = 3x^2 \cdot e^{-1/x^2} + 2 \cdot e^{-1/x^2} =$$

$$= \boxed{e^{-1/x^2} \cdot (3x^2+2)}$$

• $$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = e^{-1/0^2} \cdot (3\cdot 0^2 + 2) = 2 \cdot e^{-1/0} = 2 \cdot e^{-\infty} = 2 \cdot \frac{1}{e^{\infty}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\infty} = 2 \cdot 0 = \boxed{0}$$

• $$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = e^{-1/0^2} \cdot (3\cdot 0^2+2) = \boxed{0}$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$: La función es derivable en $x=0$

b) • $f(x) = x^3 \cdot e^{-1/x^2}$

• $f(-x) = (-x)^3 \cdot e^{-1/(-x)^2} = -x^3 \cdot e^{-1/x^2}$

• $-f(x) = -(x^3 \cdot e^{-1/x^2}) = -x^3 \cdot e^{-1/x^2}$

$f(x) \neq f(-x)$: No presenta simetría PAR.

$-f(x) = f(-x)$: Presenta simetría IMPAR.

c) $$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\,dx = \int_1^2 \frac{\cancel{x^3} \cdot e^{-1/x^2}}{\cancel{x^6}}\,dx = \int_1^2 \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,dx =$$

$$\int_1^2 e^{-1/x^2} \cdot x^{-3}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 e^{-1/x^2} \, 2x^{-3}\,dx = \boxed{\frac{1}{2} \cdot e^{-1/x^2} + C}$$

$$\left[\frac{1}{2} \cdot e^{-1/x^2}\right]_1^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-1/2^2}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-1/1^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{-1/4} - \frac{1}{2} \cdot e^{-1} = \boxed{0,205}$$

A3 a) $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases} \xrightarrow[\text{paramétricas}]{\text{Pasándolo a}} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 10 \\ z = \lambda + 90 \end{cases}$ $\boxed{\vec{v}_r = (1, 2, 1)}$

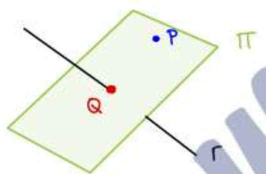
- Sabiendo que la partícula incide con el plano $z = 0$:

$$z = \lambda + 90 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = -90}$$

- Sacando el punto de corte de la recta r con plano $z = 0$:

$$Q = (\lambda, 2\lambda - 10, \lambda + 90) \rightarrow \boxed{Q = (-90, -190, 0)}$$ Posición de la partícula

b)



1) Calculamos el plano π:

$$\pi : \begin{cases} \vec{n}_\pi = \vec{d}_r = (1, 2, 1) \\ P = (1, 1, 1) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z + D = 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + D = 0 \end{array}\right\} \pi \equiv x + 2y + z - 4 = 0$$

$$\boxed{D = -4}$$

2) Calculamos el punto de corte de r con π:

$$r \equiv \begin{cases} x = -90 + \lambda \\ y = -190 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Punto genérico de r: $Q\,(-90 + \lambda, -190 + 2\lambda, \lambda)$
- Sustituimos en el plano: $\pi \equiv -90 + \lambda + 2(-190 + 2\lambda) + \lambda - 4 = 0$

$$-90 + \lambda - 380 + 4\lambda + \lambda - 4 = 0$$

$$6\lambda = 474 \rightarrow \lambda = \frac{474}{6} = \boxed{79}$$

$$Q = (-90 + 79, -190 + 2 \cdot 79, 79) = \boxed{(-11, -32, 79)}$$

Posición más próxima de la partícula al láser.

A3 c) Para calcular el ángulo de la recta y el plano:

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\vec{v_r}\cdot\vec{n_\pi}|}{|\vec{v_r}|\cdot|\vec{n_\pi}|}}$$

- $\vec{v_r} = (1,2,1)$
- $\vec{n}_\pi = (1,1,0)$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|(1,2,1)\cdot(1,1,0)|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{60^\circ}$$

A4 · Tenemos una distribución binomial $\nearrow n=10.$ $\searrow p = 0'277 \rightarrow q = 1-p = 1-0'277 = 0,723.$

$B\sim(10,\ 0'277)$

a) Para calcular la probabilidad de que la mitad sean mujeres: $P(X=5)$

$$P(X=5) = \binom{10}{5}\cdot 0{,}277^5 \cdot 0{,}723^5 = \boxed{0{,}0812}$$

b) Para calcular la probabilidad de que hubiese al menos un hombre, se puede calcular la probabilidad de que los 10 consejeros fuesen mujeres y luego el suceso contrario.

$$P(X=10) = \binom{10}{10}\cdot 0{,}277^{10}\cdot 0{,}723^{0} = \boxed{2{,}67\cdot 10^{-6}}$$

$$P(\text{al menos un hombre}) = 1 - P(X=10) = 1 - 2{,}67\cdot 10^{-6} = \boxed{0{,}999997}$$

c) Aproximación de binomial a normal: $B\sim(n,q) \longrightarrow N\sim(n\cdot p,\ \sqrt{npq})$

Primero comprobamos que $\nearrow n\cdot p > 5 \rightarrow 200\cdot 0{,}277 > 5$ $\searrow n\cdot q > 5 \rightarrow 200\cdot 0{,}723 > 5$

$B\sim(200;\ 0{,}277)$ $\nearrow n\cdot p = 200\cdot 0{,}277 = 55{,}4$ $\searrow \sqrt{n\cdot p\cdot q} = \sqrt{200\cdot 0{,}277\cdot 0{,}723} = 6{,}33$

$$\boxed{N\sim(55{,}4;\ 6{,}33)}$$

· Para calcular la probabilidad de que hubiese como mínimo un 35% de mujeres $= 35\%$ de $200 = \frac{35}{100}\cdot 200 = 70$ mujeres.

c) $P(X \geq 70) = P(X \geq 70 - 0{,}5) = P\left(Z \geq \dfrac{69{,}5 - 55{,}4}{6{,}33}\right) = P(Z \geq 2{,}23) =$

Corrección de Yates

Tipificamos

$= 1 - P(Z \leq 2{,}23) = 1 - 0{,}9871 = \boxed{0{,}0129}$

Buscamos en la Tabla

OPCIÓN B

B1

- Edad de Pablo $= x$
- Edad de Alejandro $= y$
- Edad de Alicia $= z$

1) La suma de las edades de los 3 es 45 años: $\boxed{x + y + z = 45}$

2) La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en 3 años al doble de la de Alicia: $x + y = 2z + 3 \rightarrow \boxed{x + y - 2z = 3}$

3) Se reparte 9450 € de forma directamente proporcional a la edad y además Pablo recibe 420 € más que Alicia:

- Dinero Pablo: $\dfrac{x}{x+y+z} \cdot 9450 = \dfrac{x}{45} \cdot 9450 = \dfrac{9450}{45} \cdot x = 210x$
- Dinero Alejandro: $\dfrac{y}{x+y+z} \cdot 9450 = \dfrac{y}{45} \cdot 9450 = \dfrac{9450}{45} \cdot y = 210y$
- Dinero Alicia: $\dfrac{z}{x+y+z} \cdot 9450 = \dfrac{z}{45} \cdot 9450 = \dfrac{9450}{45} \cdot z = 210z$

$210x = 420 + 210z \longrightarrow 210x - 210z = 420 \xrightarrow{\div 210} \boxed{x - z = 2}$

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 45 \\ x + y - 2z = 3 \\ x \qquad - z = 2 \end{array}\right. \xrightarrow[\text{por Gauss o por Cramer}]{\text{Resolviendo}} \left\{\begin{array}{l} x = 16 \text{ años tiene Pablo.} \\ y = 15 \text{ años tiene Alejandro.} \\ z = 14 \text{ años tiene Alicia.} \end{array}\right.$$

- Pablo: $210x = 210 \cdot 16 = 3360$ € ; • Alejandro: $210y = 210 \cdot 15 = 3.150$ € ;
- Alicia: $210z = 210 \cdot 14 = 2940$ €.

B2 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) El Teorema de Bolzano dice:

$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [a,b] \\ \text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b) \end{array}\right\}$ Existe al menos un c perteneciente a (a, b) tal que $f(c) = 0$

1) Comprobamos que $f(x)$ es continua en $[-1,1]$:

$x^2+1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \sqrt{-1}$: No hay. $\text{Dom} = \mathbb{R}$: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ luego es continua en $[-1,1]$.

2) Comprobamos los signos:

$\left.\begin{array}{l} f(1) = \dfrac{1}{1^2+1} = \dfrac{1}{2} > 0 \\ f(-1) = \dfrac{-1}{(-1)^2+1} = \dfrac{-1}{2} < 0 \end{array}\right\}$ Por lo que signo $f(1) \neq f(-1)$

$\downarrow$

Existe al menos un valor de $c \in [-1,1]$ tal que $f(c) = 0$.

Al cumplirse ambas cosas: $f(x)$ verifica la hipótesis del Teorema de Bolzano.

b) $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow -x^2+1 = 0 \rightarrow 1 = x^2 \rightarrow \boxed{x = \pm 1}$ Posibles extremos relativos

Decrece ↘ Crece ↗ Decrece ↘

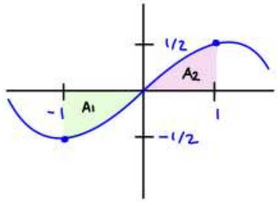
$-\infty \qquad -1 \qquad 1 \qquad +\infty$

$x = -2$: $f'(-2) = \ominus$; $x=-1$: $\cup$ mínimo; $x = 0$: $f'(0) = \oplus$; $x=1$: $\cap$ máximo; $x = 2$: $f'(2) = \ominus$

- La función presenta un mínimo relativo en $x = -1 \rightarrow (-1, f(-1)) =$ $\boxed{\text{mínimo} = (-1, -1/2).}$
- La función presenta un máximo relativo en $x = 1 \rightarrow (1, f(1)) =$ $\boxed{\text{máximo} = (1, 1/2).}$

c) Calculamos los puntos de corte con el eje OX:

$f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x}{x^2+1} = 0 \rightarrow x = 0$

c) 

$A_T = A_1 + A_2$

$A_1 = \int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot \ln|x^2+1|\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}\cdot \ln 2 \simeq |-0{,}3466| = 0{,}3466$

$A_2 = \int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot \ln|x^2+1|\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\cdot \ln 2 \simeq 0{,}3466$

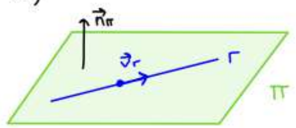
$A_T = A_1 + A_2 = 0{,}3466 + 0{,}3466 = \boxed{0{,}6932\ u^2}$

B3 $\pi \equiv x+y+z=1$ $\quad r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -1 \end{cases}$ $\quad P(0,1,0)$

$\hookrightarrow \vec{n}_\pi = (1,1,1)$

$\hookrightarrow P_r = (1,1,-1)$

$\vec{v}_r = (1,-1,0)$

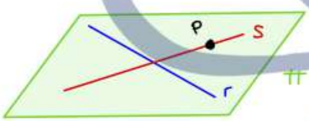
a) 

Para que la recta esté contenida en el plano se tiene que cumplir:

1) $\vec{v}_r$ sea perpendicular a $\vec{n}_\pi$: $\boxed{\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0} \rightarrow (1,-1,0)\cdot(1,1,1) = 0$

2) El P_r pertenezca al plano π : $x+y+z=1 \rightarrow 1+1-1 = 1$: El punto pertenece a π.

Por lo que la recta pertenece al plano π

b) 

Para calcular la recta s:

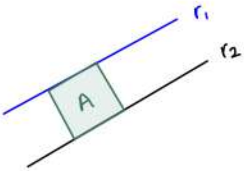
$s \begin{cases} \vec{v}_s = \vec{v}_r \times \vec{n}_\pi \\ P_s = P = (0,1,0) \end{cases}$

$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\vec{i} + (-1)\vec{j} + 2\vec{k} = (-1,-1,2)$

$\boxed{s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}}$

c) $r_2 \begin{cases} \vec{v}_{r_2} = \vec{v}_{r_1} = (1,-1,0) \\ P_{r_2} = P = (0,1,0) \end{cases}$

$\boxed{r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 0 \end{cases}}$

c) 

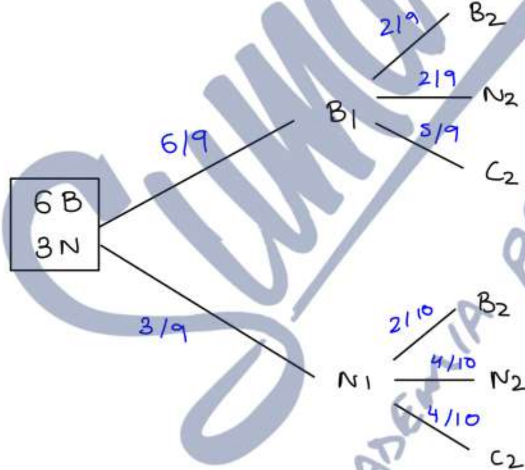
A = área del cuadrado

$$d(r_1, r_2) = d(r_1, P) = \frac{|\vec{v}_{r_1} \times \overrightarrow{PP_{r_1}}|}{|\vec{v}_{r_1}|} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$$

- $\overrightarrow{PP_{r_1}} = P_r - P = (1,1,-1) - (0,1,0) = (1,0,-1)$
- $\vec{v}_{r_1} \times \overrightarrow{PP_{r_1}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k} = (1,1,1)$
- $|\vec{v}_{r_1} \times \overrightarrow{PP_{r_1}}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$
- $|\vec{v}_{r_1}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+0} = \sqrt{2}$

$$\text{Área} = \ell^2 = [d(r_1,r_2)]^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \boxed{3/2\ u^2}$$

B4



a) P (no aparezca ningún color del sombrero) = $P(B_1) \cdot P(N_2 | B_1) +$
$P(N_1) \cdot P(B_2 / N_1) = \frac{6}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{10} = \boxed{0{,}215}$

b) P (al menos un complemento negro) = $1 - P(B_1 \cap B_2) =$

$$1 - \left(\frac{6}{9} \cdot \frac{2}{9}\right) = \frac{23}{27} \simeq \boxed{0{,}851}$$

c) $$P(N_1 | C) = \frac{P(N_1 \cap C_2)}{P(C_2)} = \frac{3/9 \cdot 4/10}{6/9 \cdot 5/9 + 3/9 \cdot 4/10} = \frac{9}{34} = \boxed{0{,}26}$$