

**INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN**

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

**TIEMPO Y CALIFICACIÓN:** 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

**A.1. ( 2 puntos)**

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule  $A^2$  y  $A^{10}$ .  
b) Calcule  $(AA - 3I)^{-1}$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden 3.

**A.2. ( 2 puntos)**

Considere la región del plano  $S$  definida por

$$x - y \geq 0, \quad y + 2x \leq 8, \quad 0 \leq y \leq 2$$

- a) Represente la región  $S$  y calcule las coordenadas de sus vértices.  
b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función  $f(x, y) = 4x - y$  en la región  $S$ , indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores.

**A.3. ( 2 puntos)**

Considere la función real de variable real

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$$

- a) Determine el valor de del parámetro real  $a$  para que el punto de abscisa  $x = -1$  de la función  $f(x)$  sea un máximo relativo.  
b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x)$  para  $a = 1$ .

**A.4. ( 2 puntos)**

En un festival de circo de verano el 70 % de los espectáculos son gratuitos y el resto de pago. El 60 % de los espectáculos gratuitos se realizan en las calles, mientras que de los de pago sólo se realizan en la calle el 20 %. Si un visitante del festival, elegido al azar, decide ir a un espectáculo, calcule la probabilidad de que:

- a) El espectáculo sea gratuito y no se realice en la calle.  
b) El espectáculo se realice en la calle.

**A.5. ( 2 puntos)**

El salario medio bruto mensual en España en 2019 se puede aproximar por una distribución normal con  $\sigma = 900$  euros.

- a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de  $\mu$  por la media muestral,  $\bar{X}$ , sea a lo sumo de 200 euros, con un nivel de confianza del 95 %.  
b) Suponga que  $\mu = 1889$  euros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 64 individuos, la media muestral,  $\bar{X}$ , sea mayor que 1900 euros.

**B.1. ( 2 puntos)**

Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 2a \\ 2x + ay + 2z = 3 \\ -x - y - z = 2 \end{array} \right\}$$

- Discuta el sistema para los diferentes valores de  $a$ .
- Resuelva el sistema para  $a = 0$ .

**B.2. ( 2 puntos)**

Dada la función real de variable real:

$$f(x) = ax^3 - x^2 - x + a$$

- Determine el valor del parámetro real  $a$  para que haya un punto de inflexión en  $x = 1$ .
- Para  $a = 2$ , calcule el área del recinto acotado por la gráfica de  $f(x)$ , el eje de abscisas y las rectas  $x = 0$  y  $x = 1$ .

**B.3. ( 2 puntos)**

Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} & \text{si } x > 1 \\ -x^2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

- Calcule  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ . ¿Es la función  $f(x)$  continua en todo su dominio?
- Calcule las asíntotas de  $f(x)$ .

**B.4. ( 2 puntos)**

En un kiosco de prensa del aeropuerto de Madrid el 40% de las ventas son periódicos y el resto revistas. Un 90% de las publicaciones están en castellano. Además se sabe que un 8% del total de las publicaciones son revistas en otro idioma. Calcule la probabilidad de que una publicación elegida al azar:

- Sea un periódico, dado que está publicado en otro idioma distinto del castellano.
- Sea un periódico o esté publicado en otro idioma distinto del castellano.

**B.5. ( 2 puntos)**

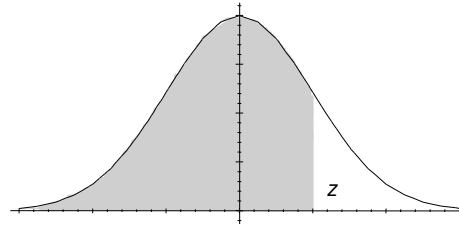
Se estima que el coste medio anual de la cesta de la compra de una familia tipo se puede aproximar por una distribución normal de media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma = 500$  euros.

- Se ha analizado el consumo de 100 familias tipo, obteniéndose un coste medio estimado de 5100 euros anuales. Calcule un intervalo de confianza al 90% para la media  $\mu$ .
- A partir de una muestra de 36 familias tipo, se ha obtenido un intervalo de confianza para  $\mu$  con un error de estimación de 160 euros. Determine el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

## Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

### ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de  $z$ .



<b>z</b>	<b>,00</b>	<b>,01</b>	<b>,02</b>	<b>,03</b>	<b>,04</b>	<b>,05</b>	<b>,06</b>	<b>,07</b>	<b>,08</b>	<b>,09</b>
<b>0,0</b>	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
<b>0,1</b>	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
<b>0,2</b>	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
<b>0,3</b>	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
<b>0,4</b>	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
<b>0,5</b>	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
<b>0,6</b>	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
<b>0,7</b>	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
<b>0,8</b>	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
<b>0,9</b>	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
<b>1,0</b>	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
<b>1,1</b>	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
<b>1,2</b>	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
<b>1,3</b>	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
<b>1,4</b>	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
<b>1,5</b>	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
<b>1,6</b>	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
<b>1,7</b>	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
<b>1,8</b>	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
<b>1,9</b>	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
<b>2,0</b>	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
<b>2,1</b>	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
<b>2,2</b>	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
<b>2,3</b>	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
<b>2,4</b>	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
<b>2,5</b>	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
<b>2,6</b>	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
<b>2,7</b>	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
<b>2,8</b>	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
<b>2,9</b>	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
<b>3,0</b>	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II  
**CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN**

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

**Ejercicio A.1.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de la matriz  $A^2$  ..... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la matriz  $A^{10}$  ..... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Determinación correcta de la matriz  $AA - 3I$  ..... 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la inversa ..... 0,75 puntos.

**Ejercicio A.2.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Representación correcta de la región factible ..... 0,50 puntos.

Obtención correcta de los vértices ..... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Encontrar el punto de valor máximo (abscisa y ordenada) ..... 0,25 puntos

Determinar máximo de la función ..... 0,25 puntos.

Encontrar el punto de valor mínimo (abscisa y ordenada) ..... 0,25 puntos

Determinar mínimo de la función ..... 0,25 puntos.

**Ejercicio A.3.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de la derivada ..... 0,25 puntos.

Planteamiento correcto ..... 0,25 puntos.

Obtención correcta del parámetro ..... 0,50 puntos

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de la derivada ..... 0,25 puntos

Determinación correcta de los intervalos ..... 0,75 puntos.

**Ejercicio A.4.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad ..... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad ..... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad ..... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad ..... 0,50 puntos.

**Ejercicio A.5.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de  $z_{\alpha/2}$  ..... 0,25 puntos.

Planteamiento correcto ..... 0,25 puntos.

Obtención correcta del tamaño mínimo ..... 0,50 puntos

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta de la distribución de la media muestral ..... 0,25 puntos.

Tipificación correcta de la variable ..... 0,25 puntos.

Determinación correcta de la probabilidad ..... 0,50 puntos.

## SOLUCIONES\_REPERTORIO 4

A.1. a)

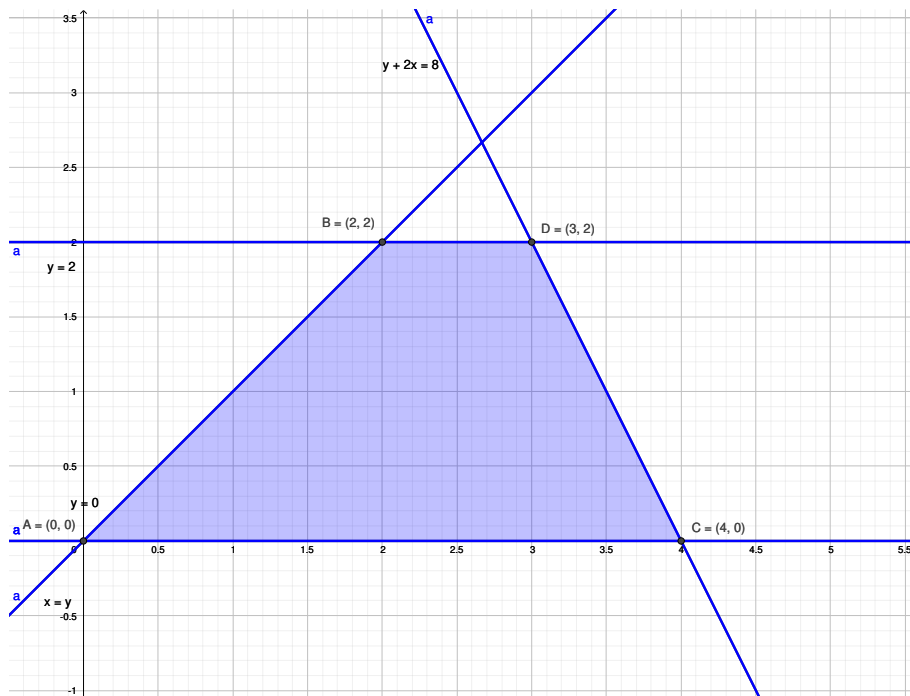
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$$

b)

$$(AA - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.2. a) Las coordenadas de los vértices son  $A = (0, 0)$ ,  $B = (2, 2)$ ,  $C = (4, 0)$  y  $D = (3, 2)$ .



b) La función  $f(x, y) = 4x - y$ . Evaluamos en los vértices de la región factible obtenidos:

- $f(0, 0) = 0 \rightarrow$  Mínimo
- $f(2, 2) = 6$
- $f(4, 0) = 16 \rightarrow$  Máximo
- $f(3, 2) = 10$

A.3. a)

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax = 0 \rightarrow x = 0; x = -\frac{a}{3} \rightarrow a = 3$$

$$f''(x) = 12x + 2a, \text{ tomando } a = 3 \rightarrow f''(-1) = -6 \text{ máximo}$$

b)

$$f'(x) = 6x^2 + 2x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0; x = -1/3$$

$x$	$(-\infty, -1/3)$	$(-1/3, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

A.4. Sean los sucesos G: Gratuito,  $\bar{G}$ : No gratuito, C: Calle,  $\bar{C}$ : No en la calle

$$P(G) = 0'7; P(\bar{G}) = 0'3; P(C|G) = 0'6; P(C|\bar{G}) = 0'2$$

a)

$$P(G \cap \bar{C}) = P(\bar{C}|G)P(G) = 0'4 * 0'7 = 0'28$$

b)

$$P(C) = P(C|G)P(G) + P(C|\bar{G})P(\bar{G}) = 0'6 * 0'7 + 0'2 * 0'3 = 0'48$$

A.5. a)

$$z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 200 \Rightarrow \sqrt{n} > 1'96 \frac{900}{200} = 8'82$$

$$n > 77'79 \Rightarrow n \geq 78$$

b)

$$P(\bar{X} > 1900) = P\left(\frac{\bar{X} - 1889}{900/\sqrt{64}} > \frac{1900 - 1889}{900/\sqrt{64}}\right)$$

$$P(Z > 0'098) = 1 - 0'54 = 0'46$$

## SOLUCIONES REPERTORIO 4

B.1. a) Las matrices del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

El determinante de  $A$  es  $|A| = -2a + 4$  que será igual a 0 si  $a = 2$ .

Entonces

$$\begin{array}{l} a = 2 \quad \text{rg}(A) = 2 \quad \text{rg}(\bar{A}) = 3 \\ a \neq 2 \quad \text{rg}(A) = 3 \quad \text{rg}(\bar{A}) = 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Sistema incompatible} \\ \text{Sistema compatible determinado} \end{array}$$

b) Para  $a=1$

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -F_3 \\ F_2 \\ F_1 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Entonces la solución es  $z = -1/2; y = -7; x = 11/2$

B.2. a)

$$f(x) = ax^3 - x^2 - x + a$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 2x - 1$$

$$f''(x) = 6ax - 2$$

$$\text{Como } f''(1) = 6a - 2 = 0 \rightarrow a = 1/3$$

b) Para  $a=2$

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$$

Como  $x = -1$  es una raíz,  $f(x) = (x + 1) * g(x)$ , con  $g(x) = 2x^2 - 3x + 2$  y  $g(x)$  no tiene raíces reales, por lo que  $f(x)$  sólo cambia de signo en  $x = -1$ ,

Como  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in (0, 1)$

$$\int_0^1 (2x^3 - x^2 - x + 2) dx = \left[ \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{5}{3}$$

B.3. a) Como

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-3}{x+1}$$

la función es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x+1} & \text{si } x > 1 \\ -x^2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-3}{x+1} = -1$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2) = -1$$

Entonces  $f(x)$  es continua en  $x = 1$  y es continua en todo  $x$ .

b) No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x+1} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$$

Tiene una asíntota horizontal en  $y = 1$  cuando  $x \rightarrow \infty$

B.4. Definimos los sucesos  $P$ : Periódico,  $\bar{P}$ : Revista,  $C$ : Castellano,  $\bar{C}$ : Otro idioma

$$P(P) = 0'4; P(\bar{P}) = 0'6; P(C) = 0'9; P(\bar{C}) = 0'1; P(\bar{P} \cap \bar{C}) = 0'08$$

a)

$$P(P|\bar{C}) = \frac{P(\bar{C} \cap P)}{P(\bar{C})}$$

Como

$$P(\bar{C}) = P(\bar{C} \cap \bar{P}) + P(\bar{C} \cap P) = 0'1$$
$$P(\bar{C} \cap P) = 0'1 - P(\bar{C} \cap \bar{P}) = 0'1 - 0'08 = 0'02$$

entonces

$$P(P|\bar{C}) = \frac{P(\bar{C} \cap P)}{P(\bar{C})} = \frac{0'02}{0'1} = 0'2$$

b)

$$P(P \cup \bar{C}) = P(P) + P(\bar{C}) - P(\bar{C} \cap P)$$

Como

$$P(\bar{C}) = P(\bar{C} \cap P) + P(\bar{C} \cap \bar{P}) = 0'1$$
$$P(\bar{C} \cap P) = 0'1 - P(\bar{C} \cap \bar{P}) = 0'02$$

$$P(P \cup \bar{C}) = P(P) + P(\bar{C}) - P(\bar{C} \cap P) = 0'4 + 0'1 - 0'02 = 0'48$$

B.5. a) La fórmula para un intervalo de confianza al 90 % es

$$IC_{0'9}(\mu) = \left( \bar{x} \pm z_{0'05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

como  $z_{0'05} = 1'64$ , con los datos del problema se obtiene

$$IC_{0'9}(\mu) = \left( 5100 - 1'64 \frac{500}{\sqrt{100}}, 5100 + 1'64 \frac{500}{\sqrt{100}} \right) = (5018, 5182)$$

b)

$$z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = Error$$
$$z_{\alpha/2} \frac{500}{\sqrt{36}} = 160 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'92$$

El nivel de confianza en el intervalo es  $1 - \alpha = 0'945$  o del 94'5 %



**Ejercicio B.1.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Cálculo correcto de los valores críticos..... 0,50 puntos.
- Discusión correcta..... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Solución correcta del sistema ..... 1,00 punto.

**Ejercicio B.2.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Expresión correcta de la segunda derivada ..... 0,25 puntos.
- Planteamiento correcto..... 0,25 puntos.
- Obtención del valor correcto del parámetro ..... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Planteamiento correcto ..... 0,25 puntos.
- Cálculo correcto de la integral indefinida ..... 0,50 puntos.
- Cálculo correcto del área..... 0,25 puntos.

**Ejercicio B.3.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Planteamiento correcto de la condición de continuidad en  $x \neq 1$  ..... 0,25 puntos.
- Planteamiento correcto de la condición de continuidad en  $x = 1$  ..... 0,25 puntos.
- Cálculo correcto de los límites laterales..... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Discusión correcta de la no existencia de asíntotas verticales/oblicuas..0,50 puntos
- Obtención correcta de la asíntota horizontal ..... 0,50 puntos

**Ejercicio B.4.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Planteamiento correcto de la probabilidad ..... 0,50 puntos.
- Cálculo correcto de la probabilidad..... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Planteamiento correcto de la probabilidad ..... 0,50 puntos.
- Cálculo correcto de la probabilidad..... 0,50 puntos.

**Ejercicio B.5.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Cálculo correcto de  $z_{\alpha/2}$  ..... 0,25 puntos.
- Expresión correcta de la fórmula del intervalo de confianza ..... 0,25 puntos.
- Determinación correcta del intervalo ..... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Expresión correcta de la fórmula del error ..... 0,25 puntos.
- Cálculo correcto de  $z_{\alpha/2}$  ..... 0,25 puntos
- Obtención correcta del nivel de confianza.....0,50 puntos.